

ZMATH 2013a.00668

Löwe, Harald

The ergodic theorem for Markov matrices. (Der Ergodensatz für Markov-Matrizen.)

Mathematikinformation, No. 57, 30-57 (2012).

Zusammenfassung: Die Modellierung mehrstufiger Prozesse führt in vielen Fällen zu einem System von Differenzgleichungen erster Ordnung, dessen langfristiges Verhalten das Berechnen der Potenzen der Begleitmatrix sowie das Finden eines Fixvektors nötig macht. Mittlerweile hat dieser Typ von Anwendungsaufgaben auch den Weg in die gymnasiale Oberstufe gefunden; so lesen wir etwa im niedersächsischen Kerncurriculum [1, S.24]: “Die Schülerinnen und Schüler wenden Potenzen von Matrizen bei mehrstufigen Prozessen an und interpretieren Grenzmatrizen sowie Fixvektoren.” Zum Auffinden der Potenzen einer Matrix wird hierbei der Taschenrechner (GTR oder CAS) eingesetzt; dies gilt ebenfalls für das Bestimmen einer Grenzverteilung. Damit hat man zwar die notwendigen Ergebnisse gefunden – aber für meinen Geschmack eigentlich nichts verstanden. Als Alternative möchte ich im Folgenden den Einsatz von Eigenwerten und Eigenvektoren zur Lösung derartiger Probleme schildern sowie als besonderes Highlight den Ergodensatz für Markov-Matrizen formulieren und beweisen. Neben einem tiefergehenden Verständnis des Themas bietet dieser Zugang eine besonders schöne Verbindung zwischen Geometrie, Analysis und Stochastik. Vorausgesetzt werden im Verlauf des Geschehens lediglich das Rechnen mit Matrizen und Vektoren sowie einige Kenntnisse über reelle Zahlenfolgen und ihrer Grenzwerte.

Classification: H64 K64 G74 M14 I74

Keywords: modelling; Markov matrices; ergodic theorem; eigenvalues; difference equations; probability