Vom Vierfarbenproblem zum Vierfarbensatz – eine Analyse mit Hilfe des Zentralblatt MATH

Bei der täglichen Arbeit hat der Mathematiker es immer wieder mit Ergebnissen zu tun, die der Beschäftigung oftmals ganzer Generationen mit einem hartnäckigen Problem entsprungen sind. Nicht immer in ihrer Geschichte haben sich Probleme der gleichen Aufmerksamkeit erfreut. Kann man so etwas mit Hilfe der Datenbank ZMATH herausbekommen? Am Beispiel des Vierfarbensatzes zeigen wir, wie sich das Interesse an einer Fragestellung über einen langen Zeitraum entwickelt hat.

Heinz Kröger

Die Entwicklung der Mathematik kann man unter anderem anhand der vielen Probleme verfolgen, die als Ansatzpunkte für die Forschung dienen. Fruchtbare Probleme ziehen nicht nur das Interesse in einem engen Bereich auf sich, vielmehr ergeben sich beim Versuch sie zu lösen, Einblicke in andere Bereiche der Mathematik. Auf diese Weise entstehen Querverbindungen, die vorher oftmals gar nicht so vorhersehbar sind. Dieser Effekt tritt immer dann auf, wenn der gerade Weg zu einer Lösung zu steinig ist und äquivalente Formulierungen für das Problem gefunden werden, die es im besten Fall ermöglichen, in einem anderen Bereich der Mathematik auf einem einfacheren Wege zu seiner Lösung zu gelangen.

Große Probleme sind in der mathematischen Gemeinschaft oft ein viele Jahre, ja Jahrzehnte beherrschendes Dauerthema. Sie ziehen im Laufe ihres Daseins manchmal mehr, manchmal weniger Aufmerksamkeit auf sich. Je länger sie präsent sind, desto stärker und vielfältiger wirken sich die oben beschriebenen Effekte aus. Die Tatsache, dass sie manchmal in mehreren Räumen des großen „Mathematikgebäudes", bisweilen gar auf verschiedenen Fluren, für Aktivitäten sorgen, machte die Gesamtmenge der Probleme zur beherrschenden Triebfeder der Mathematik. Und so vielfältig, wie sie sich vor ihrer Lösung verbreiten, so reich ist dann auch die Ernte für alle Bereiche, wenn erst einmal eine Lösung gefunden wird.

In seinem Buch „The mathematical century: The 30 greatest problems of the last 100 years" [Princeton University Press (2004; Zentralblatt MATH 1065.00003)] stellt P. Odifreddi die größten Probleme der letzten 100 Jahre vor und beschreibt ihre Auswirkungen sowohl auf das Gebiet, dem sie entstammen, als auch auf die Mathematik als Ganzes.

Hier ein paar der dort aufgeführten Probleme:

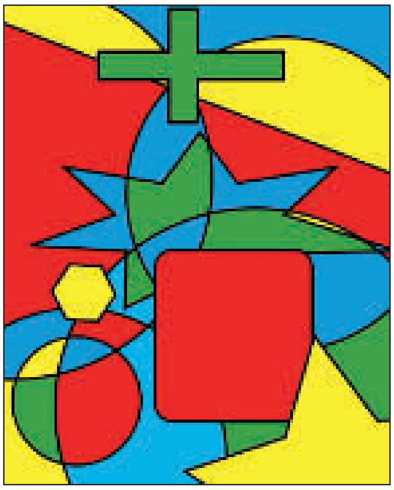
- Einsteins Allgemeine Relativitätstheorie
- Gorensteins Klassifizierung der Endlichen Gruppen
- Bieberbachs Symmetriegruppen
- Hales Lösung des Kepler-Problems
- Wileys Beweis des Letzten Satz von Fermat
- der Vierfarbensatz von Appel und Haken
- Kolmogorovs Axiomatisierung; etc.

Wie oben schon erwähnt, wurde diesen Problemen nicht in gleichmäßiger Weise Aufmerksamkeit zuteil. Uns hat es daher interessiert, ob man den Verlauf der einem Problem gewidmeten Aufmerksamkeit auf recht einfache Weise anhand der Anzahl der im Zentralblatt zu einem Thema referierten Arbeiten nachvollziehen kann.

Wir nehmen uns dazu das Vierfarbenproblem vor. Es wurde als Problem formuliert, als im Jahre 1852 in London Francis Guthrie, ein junger Absolvent des University College, in einem Brief an seinen noch studierenden Bruder Frederick diesen bat, festzustellen, ob es mathematisch zu beweisen wäre, dass jede auf ein Blatt Papier gezeichnete Landkarte mit nur vier

Farben so koloriert werden kann, dass nirgendwo zwei Länder gleicher Farbe eine gemeinsame Grenze aufweisen. Die Vierfarbenvermutung war formuliert, es sollte aber noch 124 Jahre dauern, bis der Beweis unter Dach und Fach war. Der Lehrer der Guthrie-Brüder, Prof. De Morgan, konnte keinen Beweis liefern, und so blieb es lange Zeit. 1878 trug A. Cayley das Problem der Londoner Mathematischen Gesellschaft vor, ohne dass er es lösen konnte. Ein Jahr später legte A.B. Kempe einen, seiner Meinung nach richtigen Beweis vor. Kempes Idee war es, eine Menge von Anordnungen zu finden, die in einer normalen Landkarte unvermeidbar sind. Gleichzeitig ging es ihm darum, eine Menge reduzierbarer Anordnungen zu finden, wobei man eine Anordnung als reduzierbar bezeichnet, wenn sie nicht einer minimalen fünffarbigen Karte zugehören kann. 1890 wurde Kempes Versuch des Beweises von P.J. Heawood als fehlerhaft und nur sehr schwer zu reparieren erkannt. Er versuchte das Problem vom Färben einer Karte in der Ebene auf Karten auf komplizierteren Flächen zu übertragen, wo man es leichter lösen konnte. Heawood arbeitete 60 Jahre lang an diesem Problem. Im Zuge seiner Bemühungen um das Vierfarbenproblem bewies er den Fünffarbensatz, der besagt, dass jede normale Karte mit fünf Farben gefärbt werden kann. Ein schöner Beweis dieses Satzes findet sich in dem Buch „Das Buch der Beweise“ von M. Aigner und G.M. Ziegler. In der Zeit kurz nach 1910 wurden verschiedene Wege verfolgt, man fand neue reduzierbare Anordnungen. D. Birkhoff verbesserte Kempes Ansatz, indem er zeigte, dass noch größere als die von diesem beschriebenen Konfigurationen reduzierbar sind. Nun gab es erste konkrete Ergebnisse: 1922 fand P. Franklin heraus, dass alle Landkarten mit höchstens 25 Ländern mit 4 Farben zu färben sind. 1950 wusste man bereits, dass es 36 Länder sein dürften.

1937 formulierte H. Whitney ein numerisches Äquivalent zum Vierfarbenproblem – einer der Versuche, dem Problem über einen Umweg beizukommen. Es gab ein arithmetisches Herangehen, gar eine Vierfarbenformel (J. Nuut, 1931). Die Wahrscheinlichkeit der Richtigkeit des Vierfarbensatzes wurde untersucht (E. Krahn, 1932). Nach all diesen Versuchen in den späten 20er und den 30er Jahren ließ das Interesse am Vierfarbenproblem etwas nach. Zwar kann man wohl den Krieg als den wichtigsten Grund nennen, doch kam das Problem auch nach dem Kriege erst allmählich wieder in den Focus ganzer Arbeitsgruppen. Neue Ansätze wurden formuliert, das Versagen früherer Versuche erforscht und erkannt. Viele der bekannten Graphentheoretiker haben sich mit dem Problem befasst. H. Heesch, der seit 1936 an dem Problem arbeitete, hat 1969 ein ganzes Buch zum Vierfarbenproblem ge-



schrieben. Er formulierte, er werde den Satz durch das Auffinden einer unvermeidbaren Menge reduzierbarer Anordnungen beweisen können. Seine Arbeiten waren die Vorbereitung zur Erarbeitung eines Computerprogramms, das die Operationen, die zur Ermittlung dieser unvermeidbaren Menge führen sollten, durchführen konnte, da es von Hand schier unmöglich wäre. K. Appel und W. Haken waren es dann, die im Jahre 1977 mit einem solchen Computerprogramm Erfolg hatten und 1936 unvermeidbare Anordnungen fanden, später die Zahl sogar auf 1476 verringern konnten, bevor 1996 N. Robertson, D. Sanders, P. Seymour und R. Thomas die Anzahl der unvermeidbaren reduzierbaren Anordnungen auf den Wert von 633 drücken konnten.

Mit dem Beweis von Appel und Haken im Jahre 1977 wurde zum ersten Mal eines der großen Probleme unter Verwendung des Computers gelöst. Dieser Ansatz war damals ungewöhnlich, ein klassischer Beweis mit Bleistift und Papier ist daher auch in diesem Falle noch immer erwünscht. Jedoch scheint das Überprüfen so vieler Einzelfälle in vertretbarer Zeit wohl nur mit Rechnerunterstützung möglich zu sein.

Alle eben erwähnten Arbeiten sind beim Recherchieren in der Datenbank ZMATH zu finden, die sowohl die Daten vom Zentralblatt MATH als auch die des Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik beinhaltet, somit also von der Gegenwart bis in das Jahr 1868 zurückreicht. Mit vielen kleinen Abfragen kann man sich viele wertvolle Informationen dazu beschaffen, welche Arbeiten in den einzelnen Zeitabschnitten den Weg zur Lösung des Vierfarbenproblems geebnet haben; Man findet aber auch diejenigen, deren Ansatz in eine falsche Richtung führte. Man stellt bald fest, dass Zeiten intensiver Beschäftigung auch wieder Zeiten reduzierter Aufmerksamkeit folgen. Es ist interessant, dass schon eine ganz einfache Abfrage uns einen ersten Aufschluss über die Intensität gibt, mit der in einzelnen Zeitabschnitten an dem Problem gearbeitet wurde. Da in den für das Vierfarbenproblem relevanten Arbeiten der Begriff meist im Titel auftaucht, sonst aber gewiss im Referat über die Arbeit, bietet sich diese Abfrage im „Basic Index“ (bi) an:

```
[bi: „four colo*“ | „vierfarb*“ |
„quatre couleur“| „quattro colori*“]
```

Das Ergebnis einer Suche über die gesamte Datenbank sind 488 Arbeiten. Verteilt man diese gleichmäßig zum Beispiel auf Dekaden, so erhält man folgendes Bild:

Zeitraum	Treffer
<=1900	6
1901-1910	3
1911-1920	3
1921-1930	23
1931-1940	46
1941-1950	11
1951-1960	7
1961-1970	22
1971-1980	83
1981-1990	82
1991-2000	129
2001-heute	83

Man kann an dem Ergebnis dieser kleinen Abfrage schon ganz gut beobachten, dass nach seiner Formulierung im Jahre 1852 erst einmal eine ganze Weile verging, bis man sich nennenswert mit dem Vierfarbenproblem beschäftigte. Einige wichtige Arbeiten aus der zweiten Dekade des vergangenen Jahrhunderts haben das Interesse an der Vierfarbenvermutung merklich wachsen lassen, und die Beschäftigung damit nahm in den 30er Jahren noch deutlich zu. Jedoch scheint die Komplexität dieses von der Formulierung her doch so einfachen Problems das Interesse dann wieder deutlich vermindert zu haben. Erst in der Zeit, als man sich zunehmend des Einsatzes von Computern beim Beweisen mathematischer Sachverhalte bediente, rückte das Vierfarbenproblem wieder in den Focus. Man kann an den Trefferzahlen deutlich die Zunahme des Interesses in den 70er Jahren erkennen, der Beweis von 1977 fällt ja in diese Dekade. In den folgenden Jahren hat es dann neben Versuchen, den Beweis noch zu verbessern oder zu vereinfachen, viele Arbeiten gegeben, die sich mit den Auswirkungen auf die Bereiche, in denen äquivalente Formulierungen entstanden waren, befassen. Sicherlich ist die Anzahl der Arbeiten in der Datenbank zum Vierfarbenproblem/Vierfarbensatz weit höher als die 488 hier betrachteten Ergebnisse, jedoch dürfte sich an der Aussage über die hier ermittelten Zahlen nichts wesentliches ändern.
Dies ist ein schönes Beispiel, wie man sich mit Hilfe der Datenbank ZMATH recht einfach einen Überblick über Entwicklungsverläufe in der Mathematik verschaffen kann.

Eine Literaturauswahl:

P.J. Heawood, On the four colour map theorem, Quart. J. 29, 270-285 (1898; JFM 28.0426.01).

D. Birkhoff, The reduciblity of maps, Am. J. Math. 35, 115-128 (1913; JFM 44.0568.01).

H. Whitney, The coloring of graphs, Ann. of Math. (2) 33, 688-718 (1932; JFM 58.0606.01).

P.J. Heawood, On extended congruences connected with the four colour math theorem, Proceedings L. M. S. (2) 33, 253-286 (1932; JFM 58.1203.03).

P. Heegard, Über die Heawoodschen Kongruenzen, Norsk Mat. Forenings Skrifter 2, No. 6, 47-54 (1933; JFM 59.0555.06).

K. Wagner, Bemerkungen zum Vierfarbenproblem, Jber. DMV 46, 26-32 (1936, JFM 62.0656.02).

W.T. Tutte, On the four colour conjecture, Proc. Lond. Math. Soc., II. Ser. 50, 137-149 (1948; Zbl 30,08102).

G.A. Dirac, Theorems related to the four colour conjecture. J. Lond. Math. Soc. 29, 143.149 (1954; Zbl 55.17003).

Ø. Ore, The four color problem, Pure and Applied Mathematics, New York-London: Academic Press. 259 p. (1967, Zbl 149.21101).

H. Heesch, Untersuchungen zum Vierfarbenproblem, Mannheim-Wien-Zürich: BI, Hochschultaschenbücher-Verlag, 290 p. (1969; Zbl 187.20904).

K. Appel und W. Haken, Every planar map is four colorable. I: Discharging, Ill. J. Math. 21, 429-490 (1977; Zbl 387.05009), II.: Reduciblity, Ill. J. Math. 21, 491-567 (1977; Zbl 387.05010),

J. Mayer, Une propriété des graphes minimaux dans le problème des quatre couleurs, Problèmes combinatoires et théorie des graphes, Orsay 1976, Colloq. Int. CNRS No. 260, 291-295 (1978; Zbl 419.05022).

K. Appel und W. Haken, Every map is four colorable, Contemp. Math, 98. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 741 p. (1989; Zbl 681.05027).

R. Fritsch, Der Vierfarbensatz. Geschichte, topologische Grundlagen und Beweisidee. Mannheim: BI Wissenschaftsverlag, 251 p. (1994; Zbl 830.05001).

N. Robertson, D.P. Sanders, P. Seymour, R. Thomas, A new proof of the four colour theorem, Electron. Res. Announc. Am. Math. Soc. 2, No. 1, 17-25 (1996; Zbl 865.05039).

N. Robertson, D.P. Sanders, P. Seymour, R. Thomas, The four color theorem, J. Comb. Theory, Ser. B 70, No. 1, 2-44 (1997; Zbl 883.05056).

M. Aigner und G.M. Ziegler, Das Buch der Beweise, Berlin, etc.: Springer Verlag (2004; Zbl 1038.00001).

G. Gonthier, A computer-checked proof of the four colour theorem.

Microsoft Research Cambridge, unveröffentlicht (http://research.microsoft.com/~gonthier/4colproof.pdf)

Heinz Kröger
FIZ Karlsruhe, Abteilung Mathematik und Informatik, Editor Zentralblatt Math