Wo spielt die Musik im Zentralblatt? Recherchen am Rande der Mathematik

Auch über Fachgebiete, deren Verbindungen zur Mathematik nicht so offensichtlich sind, lassen sich in ZMATH vielfältige Nachweise finden. Die Musik ist ein gutes Beispiel dafür.

Klaus-D. Kiermeier

Seit dem Altertum haben Mathematiker und Nicht-Mathematiker immer wieder versucht, Verbindungen zwischen Mathematik und Musik zu finden. Bekannt sind die Erkenntnisse von Pythagoras von Samos (ca. 580-500 v.u.Z.) und seinen Anhängern über die Verhältnisse von natürlichen Zahlen, den Längen einer schwingenden Saite und den durch die Saite hervorgebrachten Tonhöhen, die die an Zahlenmystik interessierten Pythagoreer mit Hilfe eines Monochords studierten. Sie erkannten dabei, dass eine in einem rationalen Verhältnis zweier natürlichen Zahlen unterteilte Saite einen Ton hervorbringt, der in „Harmonie" mit dem von der ungeteilten Saite hervorgebrachten Ton steht: Beim Verhältnis 1:2 ergibt sich eine Oktave, beim Verhältnis 2:3 eine reine Quinte, beim Verhältnis 3:4 eine reine Quarte usw.

Besondere Bedeutung hatte die Entdeckung des so genannten pythagoreischen Kommas. Denn in allen Tonsystemen, die auf reinen Oktaven und Quinten beruhen, gibt es eine Diskrepanz zwischen einem Intervall von sieben Oktaven und einem Intervall von zwölf Quinten, die musikalisch eigentlich als identisch angesehen werden. Diese Diskrepanz der Tonintervalle ergibt sich aus dem Unterschied zwischen $(1/2)^7$ und $(2/3)^{12}$, deren Verhältnis 524288:531441 beträgt. Diese Berechnung findet sich bereits bei Euklid. Musikalisch gesehen ist das ungefähr ein Achtelton.

In der musikalischen Praxis ergeben sich daraus erhebliche Probleme, und es gab in der Vergangenheit eine ganze Reihe von Ansätzen, Stimmungen für Instrumente zu finden, um diese Probleme möglichst gering zu halten. Die bekannteste und heute in der europäischen Musik gebräuchlichste Stimmung ist die gleichtemperierte oder wohltemperierte Stimmung, zu deren Popularisierung nicht zuletzt Bachs grandiose Sammlungen von Präludien und Fugen, „Das wohltemperierte Klavier", beigetragen haben, die schon seinen Zeitgenossen eindrucksvoll vor Augen und Ohren führten, dass es mit dieser Stimmung möglich war, alle Tonarten gleich gut klingen zu lassen. Man könnte natürlich auch sagen: „gleich schlecht", denn in dieser Stimmung sind außer den Oktaven keine Intervalle mehr rein, entsprechen also nicht mehr den oben angegebenen Verhältnissen.

In der gleichtemperierten Stimmung wird jede Oktave in zwölf Halbtonschritte unterteilt, die alle dasselbe Frequenzverhältnis von $2^{1/12}$ haben, wobei die 2 eigentlich 2:1 ist, also das Frequenzverhältnis der beiden Töne einer Oktave. Alle Frequenzen der Töne der gesamten zwölftönigen Tonleiter der gleichtemperierten Stimmung erhält man durch die geometrische Folge

$$f(i) = f_0 \cdot 2^{i/12},$$

wobei f_0 eine festgelegte Frequenz ist, z.B. der Kammerton a' (440 Hz), und i die Halbtonschrittentfernung zu dem Ton mit der Frequenz f_0. $f(i)$ ist dann die gesuchte Frequenz. Die Folge ist eine geometrische Folge, weil sie gerade so konstruiert ist, dass das Verhältnis zweier benachbarten Folgenglieder stets gleich ist.

In der Neuzeit hat zunächst vor allem Leonhard Euler (1707-1783) versucht, sich mit mathematischen Methoden der Konsonanz/Dissonanz-Problematik anzunehmen. Auch bei ihm spielen Zahlenverhältnisse, die die Frequenzverhältnisse von Intervallen wiedergeben, die wesentliche Rolle. In seinem Aufsatz „Tentamen novae theoriae musicae“ von 1739 [in: Opera omnia. Series tertia: Opera physica. Vol. I: Commentationes physicae ad physicam generalem et ad theoriam soni pertinentes. Ediderunt E. Bernoulli, R. Bernoulli, F. Rudio, A. Speiser. Leipzig, B. G. Teubner (1926; JFM 52.0021.07)] definiert Euler die folgende Gradus-suavitatis-Funktion Γ [zitiert nach Mazzola, 1990]: Sei a eine positive ganze Zahl. Nach dem Satz über eindeutige Primzerlegung lässt sich a eindeutig in der Form

$$a = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot p_3^{e_3} \cdots p_n^{e_n}$$

schreiben, wobei die $p_1 < p_2 < p_3 < \cdots < p_n$ eine wachsende Folge von Primzahlen und die $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n$ positive ganze Zahlen sind. Dann definiert Euler

$$\Gamma(a) = 1 + \sum_{1 \le k \le n} e_k \, (p_k - 1)$$

und allgemeiner

$$\Gamma(x/y) = \Gamma(x \cdot y),$$

falls (x/y) ein positiver gekürzter Bruch ist.

Setzt man nun die Zahlenverhältnisse, die musikalische Intervalle charakterisieren, in diese Funktion ein, so erhält man folgende Werte (Auswahl):

Oktave: $\Gamma(1/2) = 2$
Quinte: $\Gamma(2/3) = 4$
Quarte: $\Gamma(3/4) = 5$
große Terz: $\Gamma(4/5) = 7$
kleine Terz: $\Gamma(5/6) = 8$
große Sekunde: $\Gamma(9/10) = 10$
kleine Sekunde: $\Gamma(15/16) = 11$
Tritonus: $\Gamma(32/45) = 14$

Diese Zahlen sollen dann laut Euler ein Maß für die Annehmlichkeit eines Intervalls sein: je kleiner der Wert, desto angenehmer. Dies entspricht tatsächlich weitgehend unseren hörpsychologischen Gewohnheiten, mit Ausnahme der Quarte, die seit der Entwicklung der funktionalen Harmonik in bestimmten Zusammenhängen als dissonant empfunden wird.

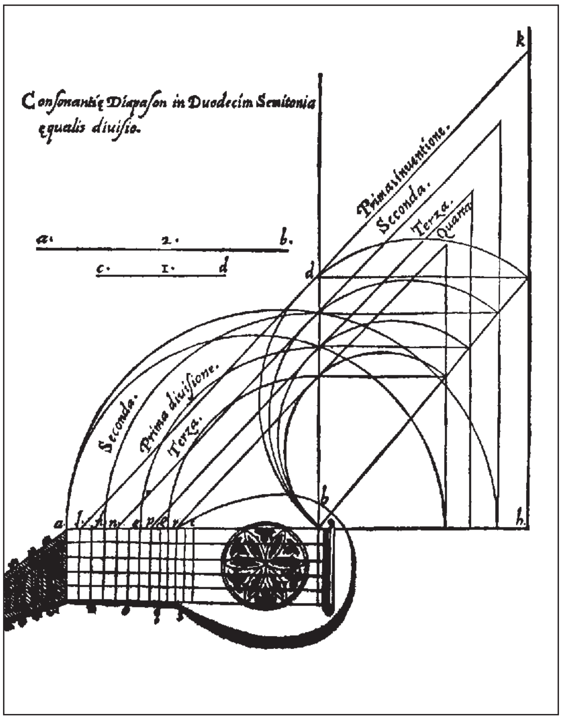

Abb. 26: Geometrische Darstellung der gleichstufigen Stimmung aus Sopplimenti musicali (1588) von Gioseffo Zarlino

Seither hat sich im Spannungsfeld zwischen Mathematik und Musik ein reiches Betätigungsfeld entwickelt. Dies zeigt sich leicht durch eine einfache Recherche in der Datenbank Zentralblatt MATH:

```
[bi:music* | bi:musik* | bi:musiq*]
```

Dies ist wie folgt zu verstehen:
„bi“ bedeutet „basic index“. In diesem Index der Datenbank sind alle Wörter und Wortsequenzen indexiert, die in irgend einem der Felder auftauchen, sei es im Titel, in der Quelle, im Referat oder Summary oder auch im Autorenfeld.
Der * bedeutet wie üblich eine Trunkierung. Es werden also alle Wörter gesucht, die mit der davor stehenden Zeichensequenz beginnen. Dabei ist berücksichtigt, dass in Zentralblatt MATH Einträge in Englisch, Deutsch und Französisch (und vereinzelt auch Italienisch) vorkommen.
Der senkrechte Strich | ist ein logisches „oder“.

Diese Recherche ergab heute (4.12.2007) 1192 Treffer, die jüngsten aus dem Jahre 2008, die ältesten von 1870. Das Ergebnis zeigt, dass es selbst in diesem Randgebiet der Mathematik eine reichhaltige Literatur gibt, deren Umfang sich in den letzten Jahrzehnten sogar noch erheblich ausgeweitet hat.

Wenn man sich die Ergebnisse der Recherche nun noch genauer ansieht, so stellt man fest, dass in der gefundenen Literatur eine Fülle verschiedenster Fragestellungen behandelt wird. Hier sind schlagwortartig einige solcher Themenbereiche aufgeführt:

- Akustik (Wellen, Spektren)
- automatisches Erkennen von Musikstücken, Musikstilen, Musikinstrumenten, Interpreten etc.
- automatische Musiktranskription
- Tonsysteme
- musikalische Stimmungen
- Musikwahrnehmung
- musikalische Kompositionen
- Musikgeschichte

Eine große Bandbreite mathematischer Methoden wird dabei verwendet, beispielsweise Zahlentheorie, Kombinatorik, Gruppen, Kategorien, Geometrie, Mannigfaltigkeiten, Algorithmen, neuronale Netze, Statistik, Fraktale, Wavelets, Differentialgleichungen und vieles mehr.

Wenn man sich für ein bestimmtes Thema bzw. bestimmte Methoden interessiert, lässt sich die obige Recherche-Anfrage leicht entsprechend abändern. Beispielweise ergibt die Anfrage

```
[(bi:music* | bi:musik* | bi:musiq*) &
(bi:acoust* | bi:akust* | bi:wave* |
bi:welle* | bi:onde*)]
```

157 Einträge aus dem Bereich der musikalischen Akustik. Das & bedeutet dabei ein logisches „und“. In gleicher Weise lassen sich auch zeitliche Einschränkungen vornehmen:

```
[(bi:"music theory" | bi:musiktheorie) &
(py:1920-1929)]
```

liefert beispielsweise Literatur zur Musiktheorie aus den Zwanzigerjahren des letzten Jahrhunderts, wobei „py“ eine Abkürzung für „publication year“ ist. Sequenzen von Wörtern, die genau in dieser Form gesucht werden sollen, müssen dabei in Anführungszeichen gesetzt werden.

Bei all dem sollte man allerdings berücksichtigen, dass die in der Zentralblatt MATH Datenbank enthaltenen Daten, die einen Zeitraum von fast 150 Jahren abdecken, nicht immer einheitlich erfasst und indexiert worden sind. Dies betrifft sowohl die Sprachen (bis zur Mitte des 20. Jahrhunderts vorwiegend Deutsch, seither vorwiegend Englisch) als auch die Vollständigkeit der Erfassung. Wenn man dies bei seinen Recherchen bedenkt, lassen sich aber alle erdenklichen Literaturnachweise zum Thema Musik und Mathematik finden, seien sie historisch oder brandneu, mathematisch anspruchsvoll oder einem breiteren Leserkreis zugänglich. Nicht zuletzt für mehrere in den letzten Jahren erschienene Monographien und Textbücher, die für den Einstieg in die mathematische Musiktheorie geeignet sind, enthält Zentralblatt MATH aufschlussreiche Besprechungen; siehe z.B. Zbl 1051.00007, Zbl 1104.00003, Zbl 1119.00008. Direkt zu dem entsprechenden Eintrag in der Datenbank gelangt man, indem man direkt nach solch einer „accession number“ fragt:

```
[an: 1104.00003]
```

Diese Anfrage liefert beispielsweise

Mazzola, Guerino: The topos of music. Geometric logic of concepts, theory, and performance. Basel: Birkhäuser (2002),

eines der jüngeren und profiliertesten Werke der mathematischen Musiktheorie.

Verzeichnis der verwendeten Literatur:

Gottwald, Siegfried; Ilgauds, Hans-Joachim; Schlote, Karl-Heinz (eds.): Lexikon bedeutender Mathematiker. Leipzig: Bibliographisches Institut (1990). Zbl 0706.01001

Gurlitt, W.; Eggebrecht, H. H. (eds.): Riemann Musik Lexikon. 12. Aufl. Sachteil. Mainz: B. Schott's Söhne (1967).

Mazzola, Guerino: Geometrie der Töne. Elemente der mathematischen Musiktheorie. Basel: Birkhäuser (1990). Zbl 0729.00008

Wille, Rudolf: „Mathematische Sprache in der Musiktheorie“, in: Jahrbuch Überblicke Mathematik 1980, 167-184 (1980). Zbl 0493.00017

Wikipedia-Einträge:
– Pythagoreisches Komma
– Gleichstufige Stimmung

Klaus-D. Kiermeier
FIZ Karlsruhe, Abteilung Mathematik und Informatik,
Editor Zentralblatt Math